



REETC/TN005: 2022

基于湍流强度分布的风电机组 疲劳累积方法

Method of wind turbine fatigue accumulation
based on turbulence intensity distribution

2022-03-15 发布

2022-03-15 实施

可再生能源专家技术委员会 发布

版权声明

本文的著作权属于可再生能源专家技术委员会成员单位共有，任何成员单位不经其他成员单位同意不得直接或变相将本文全部或部分用于商业用途或市场宣传。对于违反此声明或者其他违法使用本文内容者，可再生能源专家技术委员会将依法追究其法律责任。

本文件起草召集人：蔡志崧

本文件主要起草人员（按姓氏拼音排序）：蔡继峰、曾庆忠、陈林、陈明亮、高俊云、顾爽、贺广零、黄国庆、姜言、蒋红武、李慧、李英昌、梁汉天、林胜洋、刘贵杰、彭留留、石浩、石宇峰、宋筱文、田珊、王丹丹、王瑞良、王伟、文茂诗、徐可、徐诗婧、薛岩、闫嘉鸣、杨创、尹景勋、臧光奎、张云飞、章培成、郑友守



目 次

1	范围.....	1
2	规范性引用文件.....	1
3	术语和定义.....	1
4	机组设计阶段的应用.....	2
4.1	湍流强度分布概率密度函数形式.....	2
4.2	疲劳载荷计算方法.....	2
5	场址湍流强度分布获取方法.....	3
5.1	基于 χ^2 检验的湍流强度分布获取方法.....	3
5.1.1	场址湍流强度分布的概率密度函数形式确定.....	3
5.1.2	场址内机位点位置处湍流强度分位值获取.....	3
5.2	基于分布包络线的湍流强度分布获取方法.....	5
5.2.1	场址内测风点位置处湍流强度分位值获取.....	5
5.2.2	场址内机位点位置处湍流强度分位值获取.....	5
附录一	疲劳载荷计算湍流强度分布离散化方法研究.....	6
附录二	不同概率密度函数形式的湍流强度分布拟合结果.....	10
附录三	χ^2 检验测风塔湍流强度分布拟合优度.....	12
附录四	不同概率密度函数形式的湍流强度分布参数估计方法.....	14

基于湍流强度分布的风电机组疲劳累积方法

1 范围

IEC 61400-1: 2019 标准规定正常湍流模型 (NTM) 中轮毂高度处不同风速的湍流强度可由该风速下湍流标准偏差的 90%分位数确定。同时, 标准给出了使用该风速下湍流强度的概率密度函数 (威布尔分布) 描述 NTM 的替代方案, 但未给出基于概率密度函数确定湍流强度后的疲劳载荷累积方法。本文件在此基础上, 给出一套基于湍流强度的概率密度函数进行疲劳载荷累积的指导性方法, 适用于风电机组设计和特定场址载荷分析。

2 规范性引用文件

下列引用文件对于本说明的应用是必不可少的。凡是注有日期的引用文件, 仅所注日期的版本适用于本规范。凡是不注日期的引用文件, 其最新版本 (包括所有的修订版) 适用于本说明。

IECRE OD-501 Edition 2.0 2018-05-24 Type and Component Certification Scheme

GB/T 35792-2018 风力发电机组 合格测试及认证

IEC 61400-1:2019 “Wind energy generation systems – Part 1: Design requirements”, Edition 4.0, 2019-02

NB/T 10909-2021 微观选址中风能资源分析及发电量计算方法

3 术语和定义

3.1

湍流强度分布

描述特定风速区间内湍流强度的概率密度函数。

4 机组设计阶段的应用

在机组设计阶段使用湍流强度分布进行疲劳载荷计算时，需要确定湍流强度分布的形式、离散化的方法和离散后各区间内代表值的选取方法，本文件从上述角度给出推荐的载荷计算方法。

4.1 湍流强度分布概率密度函数形式

依据 IEC 61400-1: 2019，对于各风速区间的湍流标准差，推荐使用威布尔分布描述，计算公式如下：

$$P_w(\sigma_1 < \sigma_0) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma_0}{C}\right)^k\right] \quad (4-1)$$

式中：

$$k = 0.27V_{hub} (s/m) + 1.4$$

$$C = I_{ref} (0.75V_{hub} + 3.3 \text{ m/s})$$

对于 S 级机组，在设计阶段也可自定义概率密度函数的形式。

4.2 疲劳载荷计算方法

湍流强度分布确定后，可基于该湍流强度分布进行疲劳工况的载荷仿真，疲劳载荷工况包括 DLC1.2、DLC2.4 和 DLC6.4。从保守和节省计算量的角度考虑，也可仅对 DLC1.2 工况进行基于湍流强度分布的载荷仿真。

疲劳载荷工况各风速下的湍流强度分布按照等累积概率（即等面积）的方法均分为至少 10 个区间，如图 4-1 所示，每个区间的代表值不低于区间内 90% 分位数。湍流强度分布离散化方法研究参考附录一。如使用其他分布离散方法（区间数、区间内代表值），则需证明该方法足够保守。

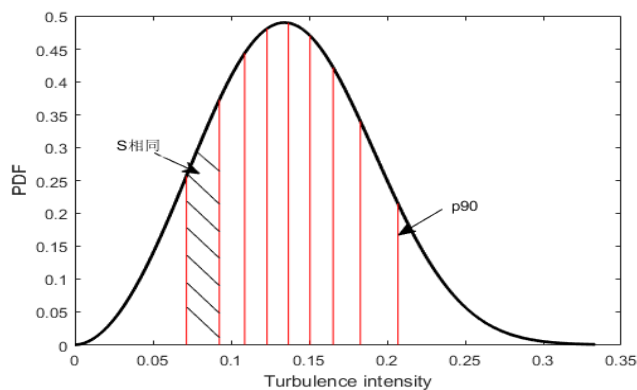


图 4-1 湍流强度分布等概率离散示意图（10 等分区间）

载荷仿真完成后，根据湍流强度分布各区间的占比进行疲劳载荷累积，得到各部件设计寿命年限对应的疲劳载荷结果。

5 场址湍流强度分布获取方法

由于不同的概率密度函数形式（正态分布、对数正态分布、威布尔分布¹）拟合湍流强度分布和获取湍流强度对应分位数时，存在较大的偏差和不确定性（详见附录二），因此需建立合适的获取湍流强度分布和对应分位数的方法。本文件提供了 2 种方法，详见 5.1 和 5.2。若因测风数据不足等原因无法使用 5.1 和 5.2 的方法，可使用威布尔分布进行假定。

5.1 基于 χ^2 检验的湍流强度分布获取方法

5.1.1 场址湍流强度分布的概率密度函数形式确定

本节推荐的方法为选择与场址数据拟合度最好的概率密度函数形式来拟合湍流强度分布，并估计各分位数下湍流强度值。此方法在测风塔对于机位点代表性不好的场址上存在较大的不确定性，需视特定场址的具体情况使用。具体步骤如下：

- 1、针对各测风塔数据，对测风塔时间序列数据各风速区间（步长 1m/s）湍流强度分别假设正态分布、对数正态分布和威布尔分布，分别进行 χ^2 检验并分别求得假设检验的 p 值（方法见附录三）。在给定的显著性水平 α 下接受原假设分布时，选取假设分布中 p 值最大的分布形式为最优分布，若 3 个分布假设都被拒绝，则该方法存在较大的不确定性，建议使用 5.2 的方法；
- 2、对于单个测风塔，不同风速区间的检验结果可能存在不一致性，目前推荐采用不同风速区间风能占比作为权重系数分别对 3 种分布形式的假设检验的 p 值（若某个假设被拒绝， p 值记为 0）进行加权计算，分别得出 3 种分布形式下的综合 p 值。在切入至切出风速区间内，以综合 p 值最大的分布形式作为该测风塔的统一概率密度函数形式，此方法在某风速区间湍流强度分布形式与测风塔统一分布形式不一致时，对各分位数下湍流强度的估计值存在一定的不确定性，需根据测风塔的具体情况进行使用；
- 3、通过上述假设检验，选出与测风塔实测数据差异最不显著的概率密度函数形式；
- 4、如存在多个测风塔，对比各测风塔在仿真阶段的权重系数，以权重系数最大的测风塔所选定的分布形式作为该特定场址的概率密度函数形式。与步骤 2 中情况类似，多个测风塔湍流强度分布形式不一致时，此方法存在不确定性，需根据特定场址和测风塔代表性等具体情况进行使用。

5.1.2 场址内机位点位置处湍流强度分位值获取

使用流体仿真软件将测风塔处环境湍流强度外推得到各机位处的环境湍流强度，并基于 5.1.1 节选定的概率密度函数形式估计机位处的概率密度函数参数和各分位数下的环境湍流强度。

基于湍流强度均值和标准差，概率密度函数中的参数可用矩估计法进行估计，本文涉及到的正态分布、对数正态分布和威布尔分布适用此方法。根据样本一阶原点矩（数学期望）和二阶中心矩（方差），可估计出相应的未知参数，代入方程得出具体的概率密度函数（probability density function），推导出累积分布函数

¹正态分布、对数正态分布、威布尔分布分别为 IEC 61400-1 第 2、3、4 版推荐的湍流概率密度函数形式。

(cumulative distribution function)，参数估计方法详见附录四。由此可以计算得各分位数对应的环境湍流强度值（P₁₉、P₂₉...P₉₉等）。

将环境湍流强度的不同分位数结果分别叠加附加湍流强度可得到有效湍流强度分布。有效湍流强度计算方法参考 IEC 61400-1: 2019 附录 E 公式 E.1：

$$I_{eff}(V_{hub}) = \left\{ \int_0^{2\pi} p(\theta|V_{hub}) I^m(\theta|V_{hub}) d\theta \right\}^{\frac{1}{m}} \quad (5-1)$$

式中：

p 为风向分布的概率密度函数；

I 为 θ 方向上综合环境流场及尾流的湍流强度， $I = \sqrt{I_{amb}^2 + I_{add}^2}$ ， I_{amb} 为各仓内 90%分位数对应的环境湍流强度值， I_{add} 为附加湍流强度值；

m 为结构部件所使用材料的Wöhler曲线指数。

5.2 基于分布包络线的湍流强度分布获取方法

5.2.1 场址内测风点位置处湍流强度分位值获取

测风点的数据通常为包含 10min 风速均值和标准差的时间序列数据，针对此类数据，各风速区间各分位数下湍流强度分位值获取方法如下：

- 1、将数据基于风速区间分仓；
- 2、针对每个风速区间的数据，基于三种不同的总体分布假设（正态分布、对数正态分布、威布尔分布），分别拟合得到三类分布下的分布参数估计值；
- 3、针对每个风速区间的数据，基于三类分布下的分布参数估计值，分别得到各分位数下不同分布对应的分位值，示例如下：

$$X\% \text{分位: } \{P_{Normal}^X, P_{Lognormal}^X, P_{Weibull}^X\}$$

- 4、针对每个风速区间的数据，基于第 3 步的结果，每个分位数下，均取三种分布分位值的最大值作为该分位数下湍流强度分位（代表）值，示例如下：

$$X\% \text{分位: } PX = \max\{P_{Normal}^X, P_{Lognormal}^X, P_{Weibull}^X\}$$

5.2.2 场址内机位点位置处湍流强度分位值获取

由于流体仿真软件的特性，机位点处的两种环境湍流强度数据形式及对应的环境湍流强度各分位值获取方法如下：

- 1、机位点处的环境湍流强度信息与测风点处形式相同，即包含风速均值和标准差的时间序列数据。针对此类情况，机位点处环境湍流强度分位（代表）值获取方法与测风点处相同，详见 5.2.1 节；
- 2、机位点处的数据仅包含统计信息：各分位数下环境湍流强度的强度均值和标准差。针对此类情况，机位点处环境湍流强度分位（代表）值获取方法步骤如下：

- ① 针对每个风速区间的数据，基于环境湍流强度的强度均值和标准差，分别计算得到三类分布（正态分布、对数正态分布、威布尔分布）的分布参数值，计算方法详见附录四。基于三类分布下的分布参数计算值，分别得到各分位数下不同分布对应的分位值，示例如下：

$$X\% \text{分位: } \{P_{Normal}^X, P_{Lognormal}^X, P_{Weibull}^X\}$$

- ② 针对每个风速区间的数据，基于第①步的结果，每个分位数下，均取三种分布分位值的最大值作为该分位数下环境湍流强度分位（代表）值，示例如下：

$$X\% \text{分位: } PX = \max\{P_{Normal}^X, P_{Lognormal}^X, P_{Weibull}^X\}$$

得到各分位值的环境湍流强度后，采用 5.1.2 的方法得到有效湍流强度的各分位数结果。

附录一 疲劳载荷计算湍流强度分布离散化方法研究

湍流区间划分的方法基于划分方式及网格密度，常见划分方式包括等间距和等累积概率（即等面积）两种方式。考虑到等间距法在概率较低处的划分段数偏多，在增大计算量时，对于结果精度的提高没有明显的效果，所以本文件推荐采用等累积概率（即等面积法）。两种划分方式见图 F1-1。

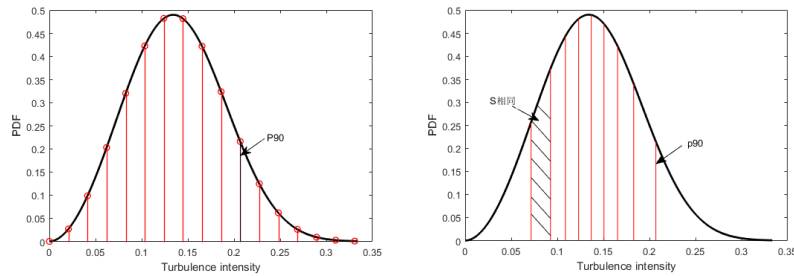


图 F1-1 两种常见划分方式（左等间距，右等累积概率）

网格密度的选择将综合考虑计算效率及降载效果。通过统计行业内常见机型不同关键载荷在不同网格密度下（即不同区间数）的降载效果差异，给出网格密度的推荐值。统计机型的信息如表 F1-1 所示。

表 F1-1 统计机型信息

机型数量	8 个
功率等级范围	2~10MW
机组传动类型	直驱、半直驱、双馈
机组塔架类型	钢塔、柔塔
机组湍流等级	B~C 类
分仓数	10、20、30、40 仓

本部分采用 10-40 不同的分仓数，仓内代表值为 P90 的分布离散化方法，对以上八个机型进行疲劳载荷仿真。通过对比各关键等效疲劳载荷结果与原 P90 法计算所得的载荷结果，得到不同分仓数下的载荷水平及变化趋势，如图 F1-2 至图 F1-15 所示。

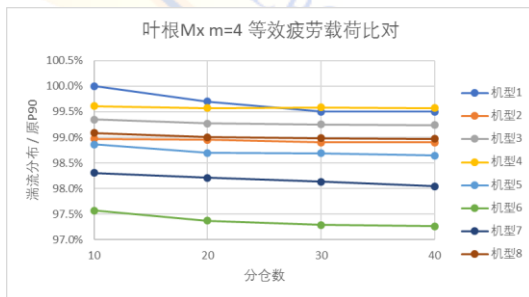


图 F1-2 叶根 $M_x m=4$

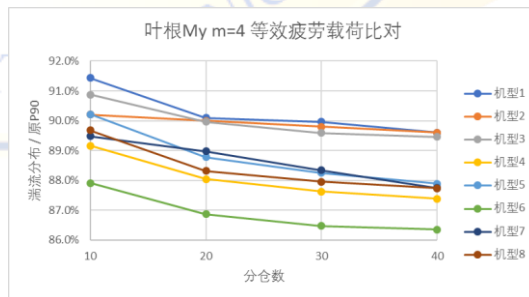


图 F1-3 叶根 $M_y m=4$

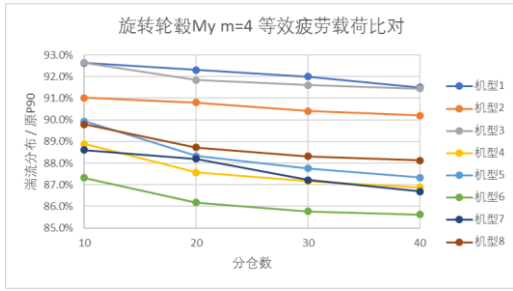


图 F1-4 旋转轮毂 My m=4

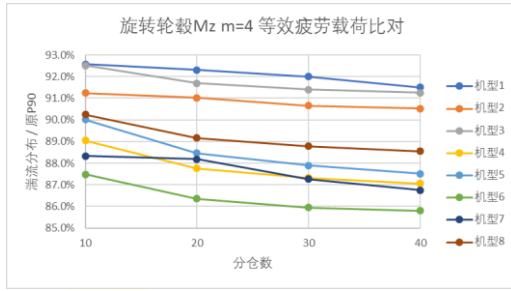


图 F1-5 旋转轮毂 Mz m=4

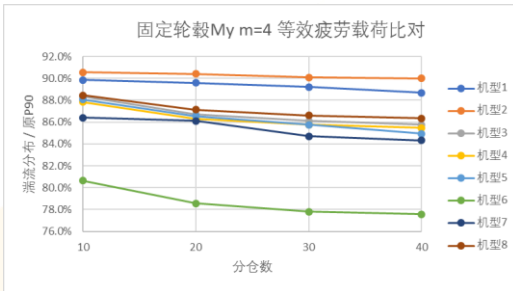


图 F1-6 固定轮毂 My m=4

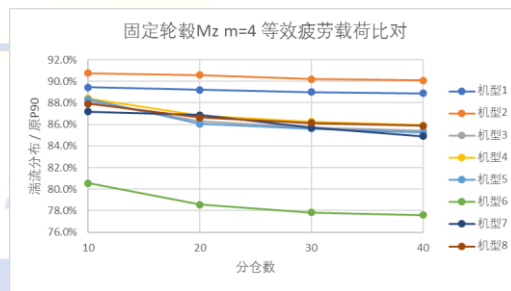


图 F1-7 固定轮毂 Mz m=4

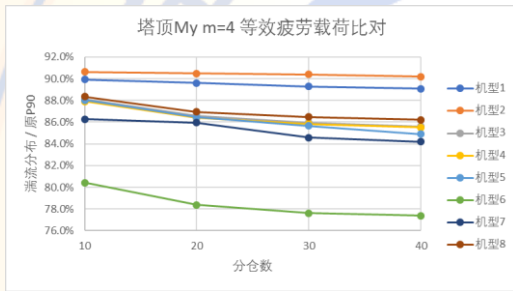


图 F1-8 塔顶 My m=4

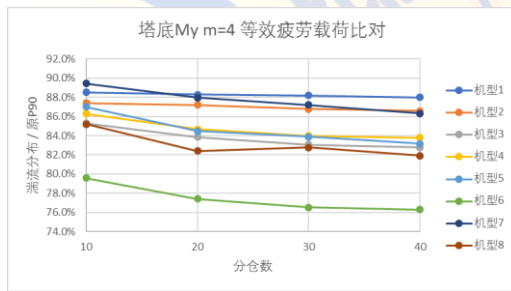


图 F1-9 塔底 My m=4

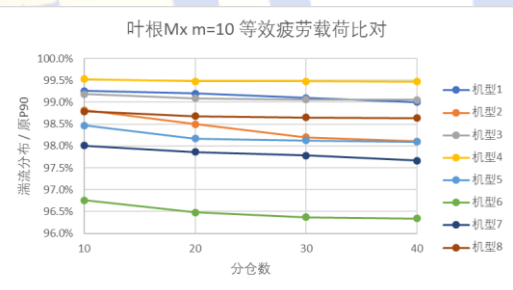


图 F1-10 叶根 Mx m=10

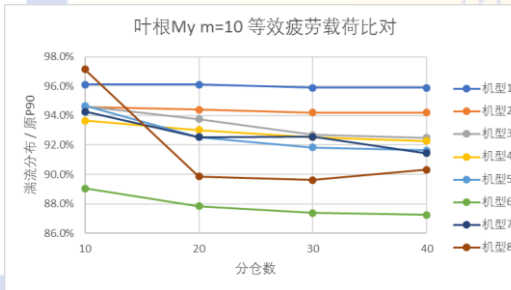


图 F1-11 叶根 My m=10

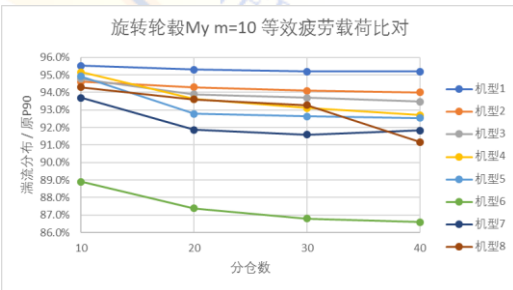


图 F1-12 旋转轮毂 My m=10

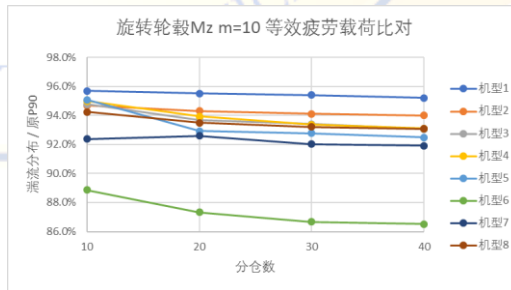


图 F1-13 旋转轮毂 Mz m=10

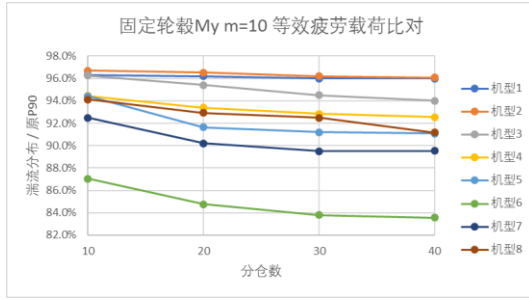


图 F1-14 固定轮毂 My m=10

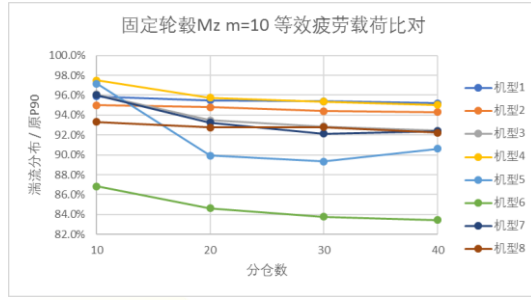


图 F1-15 固定轮毂 Mz m=10

以上比对结果显示，对于绝大部分机组，使用 P90 作为仓内代表值时，随着分仓数的增加，载荷结果逐渐降低，因此仓内代表值 P90 方法进行计算的结果已足够保守，各统计机型不同分仓平均降载比例数据见表 F1-2。

表 F1-2 统计机型各分仓平均降载比例

降载平均比例统计		10 仓	20 仓	30 仓	40 仓
m=4	叶根 Mx	1.0%	1.2%	1.2%	1.2%
	叶根 My	10.1%	11.1%	11.5%	11.8%
	旋转轮毂 My	9.9%	10.8%	11.2%	11.5%
	旋转轮毂 Mz	9.8%	10.6%	11.1%	11.4%
	固定轮毂 My	12.5%	13.6%	14.2%	14.6%
	固定轮毂 Mz	12.4%	13.6%	14.2%	14.5%
	塔顶 My	12.5%	13.6%	14.3%	14.6%
塔底 My	13.9%	15.5%	15.9%	16.4%	
m=10	叶根 Mx	1.4%	1.6%	1.7%	1.7%
	叶根 My	5.7%	7.5%	7.9%	8.1%
	旋转轮毂 My	6.0%	7.2%	7.5%	7.8%
	旋转轮毂 Mz	6.2%	7.0%	7.4%	7.6%
	固定轮毂 My	6.0%	7.4%	7.9%	8.3%
	固定轮毂 Mz	5.3%	7.5%	8.0%	8.1%

通过分仓 10 与分仓 20、30、40 的分别比对可知，绝大部分关键载荷的降载效果差异较小，降载差异最大为 4%，综合考虑计算效率，本文推荐的分仓数为 10。

通过以上方式得到各机型降载效果统计数据见表 F1-3。从表中可知，当材料系数 $m=4$ 时，各机型不同分量的平均降载效果为 10% 左右，最高降幅接近 20%。材料系数 $m=10$ 的降载效果有所降低。

表 F1-3 统计机型降载效果（分仓数 10）

降载比例统计		最小比例	最大比例	平均比例
m=4	叶根 Mx	0.0%	2.4%	1.0%
	叶根 My	8.6%	12.1%	10.1%
	旋转轮毂 My	7.4%	12.7%	9.9%
	旋转轮毂 Mz	7.4%	12.5%	9.8%
	固定轮毂 My	9.4%	19.4%	12.5%
	固定轮毂 Mz	9.2%	19.5%	12.4%
	塔顶 My	9.4%	19.6%	12.5%
	塔底 My	10.6%	20.4%	13.9%
m=10	叶根 Mx	0.5%	3.2%	1.4%
	叶根 My	2.9%	11.0%	5.7%
	旋转轮毂 My	4.5%	11.1%	6.0%
	旋转轮毂 Mz	4.3%	11.1%	6.2%
	固定轮毂 My	3.3%	13.0%	6.0%
	固定轮毂 Mz	2.5%	13.2%	5.3%

综上，本文推荐的疲劳载荷计算时湍流强度分布的离散化方法为：在每个风速区间内，湍流强度分布按照等累积概率（即等面积）的方法均分为至少 10 个仓，每个仓内的推荐代表值为仓内 90%分位数。

附录二 不同概率密度函数形式的湍流强度分布拟合结果

选取不同代表地形下测风塔完整年数据进行分风速区间湍流强度分布拟合并估计对应 30%，50%，70%，90%和 99%分位数下湍流强度值，从图中可看出，除 90%分位数外，其他分位数下不同概率密度函数形式拟合得到的湍流强度值存在较大差异。因此，在特定场址分析中需选择合适的概率密度函数形式。

案例 1：山地地形

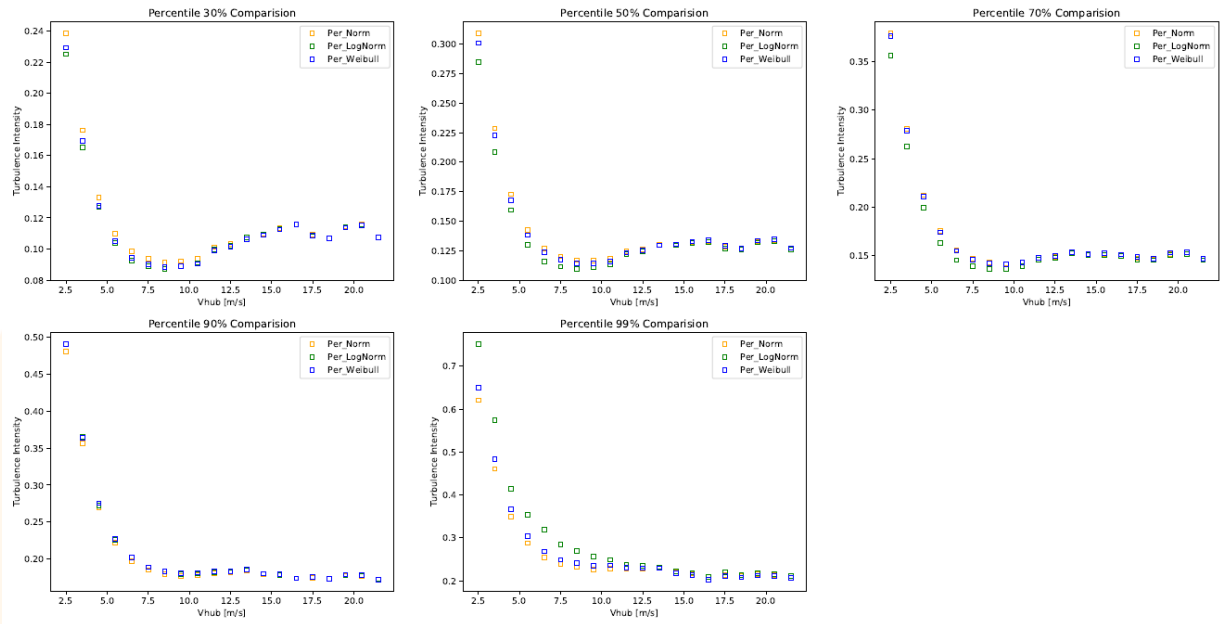


图 F2-1 山地地形不同概率密度函数形式的湍流强度分布拟合结果

案例 2：丘陵地形

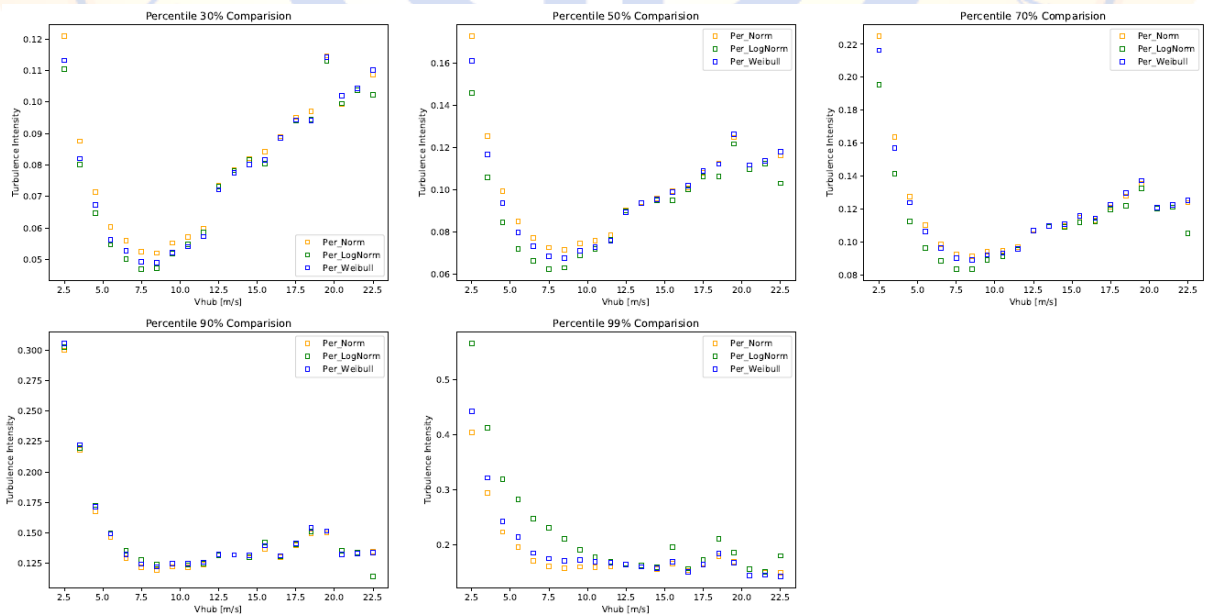


图 F2-2 丘陵地形不同概率密度函数形式的湍流强度分布拟合结果

案例 3: 平坦地形

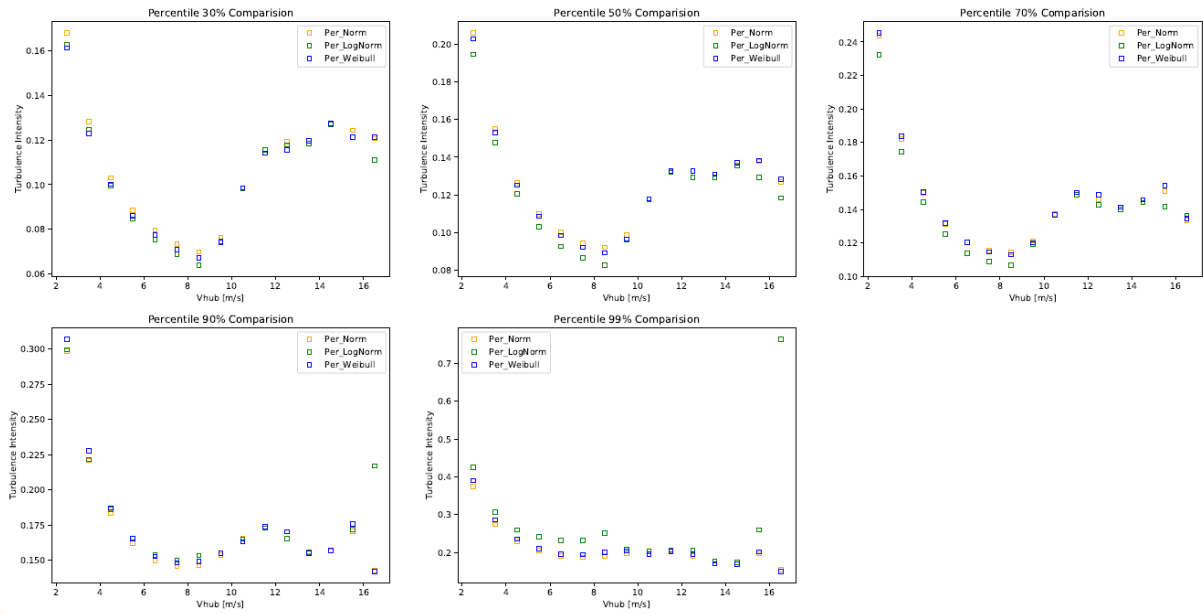


图 F2-3 平坦地形不同概率密度函数形式的湍流强度分布拟合结果

附录三 χ^2 检验测风塔湍流强度分布拟合优度

分风速区间单独处理，将每个风速区间内的湍流强度划分成互不交叉的 m 个区间，根据每个区间的实际频数和理论频数进行 χ^2 检验。需要注意的是 χ^2 拟合优度检验法是在 n 充分大的条件下得到的，所以在使用时必须注意 n 要足够大及 $n \cdot P_i$ 不能太小。根据实际经验，通常要求 $n \geq 50$ ， $n \cdot P_i \geq 5$ ，否则宜适当合并区间以满足要求。

χ^2 分布的概率密度函数为：

$$f(y) = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(\frac{n}{2})} y^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{y}{2}\right), y > 0 \quad (\text{F3-1})$$

式中：

n 表示自由度；

y 表示 χ^2 。

1、临界值法的检验步骤为：

(1) 提出原假设 H_0 ：湍流总体 X 的分布函数是 $F(x)$ ；

备择假设 H_1 ：湍流总体 X 的分布函数不是 $F(x)$ ；

由于原假设中有 r 个参数未知，需要先用最大似然法估计出这 r 个参数，其中最大似然方程可能为超越方程，可采用迭代法求数值解；

(2) 将 x 轴分为 m 个互不重叠的小区间，如：

$[0, b_1), [b_1, b_2), [b_2, b_3), [b_3, b_4), \dots, [b_{m-1}, +\infty)$ ；

(3) 计算样本的 n 个观察值落入以上每个区间的个数，记为 f_i ($i=1, 2, \dots, m$)，称其为实际频数。所有实际频数之和 ($f_1+f_2+\dots+f_m$) 等于样本容量 n ；

(4) 在原假设 H_0 为真时，计算总体落入每个区间的概率 $P_i = F(b_i) - F(b_{i-1})$ ($i=1, 2, \dots, m$)，于是 nP_i 就是落入第 i 个区间的样本值的理论频数；

(5) 检验统计量为：

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(f_i - np_i)^2}{np_i} \quad (\text{F3-2})$$

定理：若 n 充分大 ($n \geq 50$)，则当 H_0 为真时，统计量 χ^2 近似服从 $\chi^2(k-r)$ 分布。

据以上讨论，当 H_0 为真时，统计量 χ^2 不应太大，如 χ^2 过分大就拒绝 H_0 ，拒绝域为：

$$W = \{\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha}(m-r-1)\} \quad (\text{F3-3})$$

式中：

r 表示 $F(x)$ 中被估计的参数的个数；

α 表示显著性水平，显著性水平越高， α 越小。

如检验统计量 χ^2 在拒绝域内，则拒绝原假设“湍流总体 X 的分布函数是 $F(x)$ ”；如检验统计量 χ^2 不在拒绝域内，则接受原假设“湍流总体 X 的分布函数是 $F(x)$ ”。

2、 p 值法：

为便于选出最优分布，建议在上述步骤5，计算出检验统计量 χ^2 后，计算不同分布假设检验的 p 值，即由检验统计量的样本观察值得出的原假设可被拒绝的最小显著性水平，即 α 的最大值，该值可以通过计算机程序或软件直接得出。

α 值可以由使用者自定义，一般在统计上常取 $0 < \alpha \leq 0.1$ 。

对于任意指定的显著性水平 α ，有：

- 1) 若 p 值 $\leq \alpha$ ，则在显著性水平 α 下拒绝 H_0 ；
- 2) 若 p 值 $> \alpha$ ，则在显著性水平 α 下接受 H_0 。

对于正态分布、对数正态分布、威布尔分布分别检验后得出不同的 p 值，在接受 H_0 的前提下，选取 p 值最大的为最优分布。



附录四 不同概率密度函数形式的湍流强度分布参数估计方法

1、正态分布

正态分布的概率密度函数为：

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \quad (\text{F4-1})$$

其中 μ 和 σ 为参数，正态分布的数学期望为 μ ，方差为 σ^2 。采用矩估计法估计参数时，根据样本均值 \bar{X} 和方差 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(X_i - \bar{X})^2$ 可求得 μ 和 σ 的估计值。

2、对数正态分布

对数正态分布的概率密度函数为：

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-(\ln x - \mu)^2/(2\sigma^2)}, \quad x > 0 \quad (\text{F4-2})$$

其中 μ 和 σ 为参数，对数正态分布的数学期望为 $e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$ ，方差为 $e^{2\mu + \sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1)$ 。采用矩估计法估计参数时，根据样本均值 \bar{X} 和方差 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(X_i - \bar{X})^2$ 联立方程组可求得 μ 和 σ 的估计值。

3、威布尔分布

威布尔分布的概率密度函数为：

$$f(x) = \frac{k}{c} \left(\frac{x}{c}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{x}{c}\right)^k}, \quad x > 0 \quad (\text{F4-3})$$

其中 k 为形状参数， c 为尺度参数。
该分布的数学期望为：

$$E(X) = c \Gamma\left(\frac{1}{k} + 1\right) \quad (\text{F4-4})$$

方差为：

$$D(X) = c^2 \left\{ \Gamma\left(\frac{2}{k} + 1\right) - \left[\frac{1}{k} + 1\right]^2 \right\} \quad (\text{F4-5})$$

采用矩估计法估计参数时，根据样本均值 \bar{X} 和方差 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(X_i - \bar{X})^2$ 联立方程组可推导出以下方程式计算 k 的估计值：

$$\left(\frac{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(X_i - \bar{X})^2}}{\bar{X}} \right)^2 = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right)}{\Gamma^2\left(1 + \frac{1}{k}\right)} - 1 \quad (\text{F4-6})$$

再将 k 代入下式求得 c 的估计值：

$$c = \frac{\bar{X}}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)} \quad (\text{F4-7})$$

其中， Γ 表示 gamma 函数。由于 F4-6 方程为超越方程，建议采用迭代法求数值解。